Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

Титовская средняя общеобразовательная школа

«Метод лепестков»

Артамонова Вера Анатольевна

учитель математики,

I квалификационная категория

2019 год

В элементарной математике метод интервалов давно известен. Его применение значительно облегчает решение дробно-рациональных неравенств. Вкратце его суть состоит в нанесении на координатную прямую критических значений переменной и нахождения знака рассматриваемого выражения на полученных интервалах. Но если нахождение критических точек не вызывает особого труда, то при определении знаков выражения возникают значительные сложности. Если не очень твердо усвоить метод решения неравенств с помощью интервалов и расставлять знаки, просто чередуя плюсы и минусы, то достаточно просто прийти к неверному ответу. Обычно для определения знаков советуют либо вычислять знак на каждом из интервалов, либо вести тщательный счет кратности корней.

В школьном курсе математики метод интервалов рассматривается для решения квадратных неравенств, если квадратный трехчлен имеет два различных корня. И здесь у большинства учащихся не возникает затруднений. Если же квадратный трехчлен имеет два одинаковых корня (полный квадрат) или не имеет действительных корней, то метод интервалов не используется и необходимо решить данное неравенство графически. Ни для кого не секрет, что учащихся, имеющих слабую математическую подготовку, постигает неудача.

Но и такие неравенства можно решать методом интервалов! И с ними справляются большинство учащихся.

Пример1. Решить неравенство: $x^2 + x + 1 \geq 0$.

$x^2 + x + 1 = 0$. $\quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

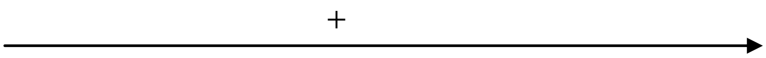
Квадратный трехчлен не имеет действительных корней. А значит на прямой нет чисел, при переходе через которые происходит смена знака. Т.е. при любом значении x знак будет постоянный. Его определяем по старшему коэффициенту (или подставляет в неравенство любое число и проверяем знак квадратного трехчлена). Изображаем:

Нам необходимо найти значения x при которых квадратное неравенство принимает неотрицательные значения.

Ответ. x – любое число.

Пример 2. Возьмем этот же квадратный трехчлен и поменяем знак неравенства.

$x^2 + x + 1 \leq 0$.



По рисунку, очевидно, что отрицательных значений нет.
Ответ. Нет решений.

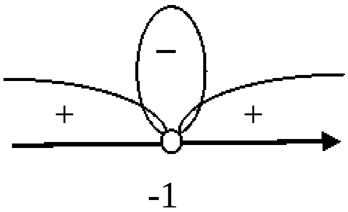
Чередование знаков в методе интервалов присутствует часто, но далеко не всегда. Квадратный трехчлен $x^2 +2x + 1$ имеет единственный корень (или часто говорят два одинаковых корня). И тогда при решении неравенства советуют вычислять знак на каждом из интервалов. Что учащиеся часто забывают делать.

Итак, при возникновении трудностей в решении неравенств методом интервалов, можно применить «метод лепестков».

$x^2 + 2x + 1 > 0$ $\quad x_{1,2} = -1$

Следовательно, у нас две слившиеся точки, между которыми – воображаемый интервал с началом и концом в одной и той же точке - 1, названный «лепестком».

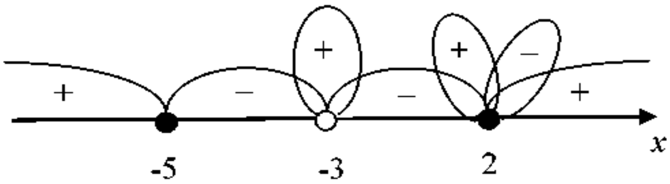
Осталось расставить знаки. Для этого вычислим знак квадратного трехчлена в любом интервале и расставим, чередуя, знаки на остальных интервалах и в «лепестке».



Ответ. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Решим неравенство: $\dfrac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2} \geq 0.$

Нули числителя: x = -5 и x = 2. Отметим их на числовой оси закрашенными кружками (неравенство нестрогое). Множитель (x – 2) в третьей степени, над точкой 2 рисуем два «лепестка». Точка -3 выколота как нуль знаменателя. Заметим, что множитель (x+3) стоит в квадрате. Над этой точкой также нарисуем «лепесток». Определим знак на любом из интервалов и расставим знаки на остальных интервалах и в «лепестках», чередуя знаки.



Ответ: $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$.

Следовательно, мы избавились от необходимости вычислять знаки на каждом интервале. Преимущество этого метода видно при решении неравенств, у которых нули числителя и знаменателя могут совпадать.

В целях избежания ошибок при определении цвета точек, необходимо сначала отметить нули знаменателя светлыми кружками (выколотые точки), а потом - нули числителя. При этом, если при нанесении точки на координатную ось такое значение уже отмечено, ставим над ней «лепесток».

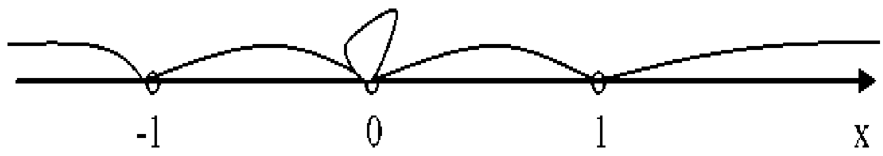
Рассмотрим решение неравенства, у которого критические точки числителя и знаменателя совпадают.

Пример. Решить неравенство: $\frac{(x^3-4x^2-5x)(5x-x^2)(1+x)}{(x^2-1)\,x^2} \geq 0$

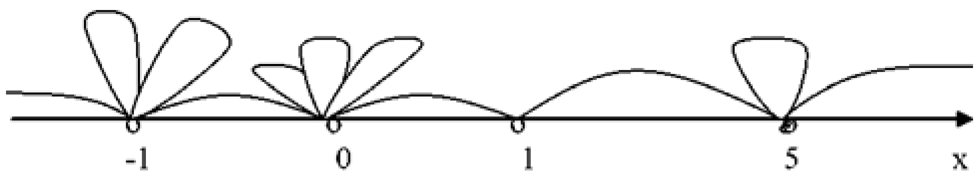
Разложим левую часть неравенства на множители:

$$\frac{x(x+1)(x-5)\,x\,(5-x)(1+x)}{(x-1)(x+1)\,x^2} \geq 0$$

Нанесем на координатную ось, сначала нули знаменателя (критические точки). Над нулем рисуем «лепесток». так как x в квадрате:

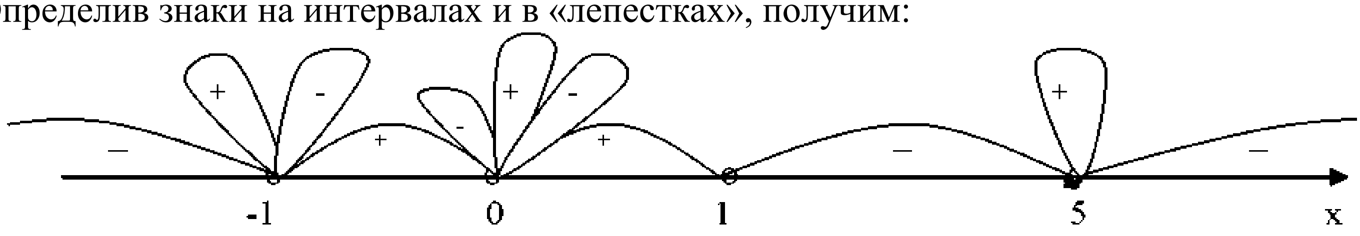


Затем на эту координатную ось добавляем нули числителя:



Если нули числителя и знаменателя совпадают, то рисуем еще один лепесток.

Определив знаки на интервалах и в «лепестках», получим:



При нарушении чередования знаков надо быть очень внимательным и не забывать, что любая закрашенная точка является решением нестрогого неравенства. «Лепесток» над точкой 5 напомнит нам, что данную точку надо включить в ответ.

Ответ: (-1;0) U (0 ;1) U {5}.

Применимость метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств, для подтверждения чего решим показательное неравенство из материалов для подготовки к ЕГЭ.

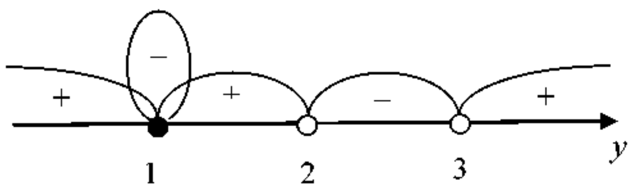
$$\frac{2^x}{2^x-3}+\frac{2^x+1}{2^x-2}+\frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\le 0.$$

Введем новую переменную

$$2^x = y; \qquad \frac{y}{y-3}+\frac{y+1}{y-2}+\frac{5}{y^2-5\cdot y+6}\le 0.$$

Приведем все слагаемые к общему знаменателю и разложим на линейные множители левую часть неравенства

$$\frac{2y^2-4y+2}{(y-3)(y-2)}\le 0, \quad \frac{2(y-1)^2}{(y-3)(y-2)}\le 0$$



Отметим на числовой оси нули знаменателя и числителя. Нули знаменателя $y_1= 2$, $y_2 = 3$ выколоты, нули числителя $y_{3,4}=1$ - две совпадающие точки - отметим закрашенными кружками, так как неравенство нестрогое. Над точкой 1 нарисуем «лепесток».

Расставим знаки в интервалах и в «лепестке». «Лепесток» над точкой 1 напомнит нам, что данную точку надо включить в ответ. Запишем решение: $y = 1$, $2 < y < 3$.

Обратная замена: $2^x = 1$, $x = 0$; $2 < 2^x < 3$; $2 < 2^x < 2^{\log_2 3}$; $1 < x < \log_2 3$.

Ответ: $\{0\} \cup (1;\ \log_2 3)$.

Заключение

Обобщая все вышеизложенное, перечислим еще раз наиболее существенные, на мой взгляд, преимущества данной системы изложения методом интервалов:
1) Появляется возможность расставлять знаки на интервалах, просто их чередуя.
2) Отпадает необходимость считать кратность корней.

3) Исчезает необходимость приводить все скобки к стандартному виду (х-а). При обнаружении как скобки (х – а), так и скобки (а – х), нужно просто добавить еще один «лепесток» над точкой а.

4.При таком методе решения неравенств с помощью «лепестков» никогда не теряются одиночные корни.

Список литературы

1) festival.1september.ru/articles/506423/
2) Л.М.Фридман, Е.Н.Турецкий. Как научиться решать задачи. Книга для учащихся старших классов средней школы. – Москва. Просвещение, 1989.
3) В.А.Гусев, А.Г.Мордкович. Математика. Справочные материалы. Учебное пособие для учащихся. – Москва. Просвещение, 1986.
4) Е.Ю.Иванова. Такой простой метод. Математика в школе. – Москва, 1998.